音速について考えてみよう！

金沢工業大学
中村晃

ねらい

私たちの身の回りにはいろいろな種類の波が存在する．体感できる波もあれば，できない波もある．その中で音は体感できる最も身近な波である．遠くで雷が光ってから雷鳴が届くまで数秒間時間がかかることにより，音の方が光より伝わるのに時間がかかることも経験していると思う．高校の物理の授業で音の伝わる速さ（音速）は約 340 m/s で，詳しく述べると 1 気圧では $331.5+0.6t$ m/s（t は摂氏温度）と温度の関数であると学ぶ．しかし，なぜこのような関係式になるのか詳しく学ぶ機会はない．そこで，本テーマを考えた．

本テーマでは空気の弾性的性質を基本的な式から示し，空気の微視的な圧縮膨張により生じる音の伝わる速さ(音速)を表す $331.5+0.6t$ m/s という関係式を単純なモデルを考えて導いていく．多くの数学や物理の知識を基に論理的に考えることにより音速を表す式が導かれていることを理解することにより，公式を単に覚えるのではなく公式を導く過程が大切であることを学ぶ．

目次

1. 空気の弾性的性質

音は空気が移動して伝わるのではなく，空気の振動がドミノ倒しのように近傍の空気を振動させることにより伝わっていく．このように空気の振動が伝わる速さが音速である．音速を理論的に求めるには，まず空気の性質を知る必要がある．注射器などのピストンに空気を入れてピストンを押すと押し返されるという経験をしたことがあると思う．このように空気はバネと同じような弾性的性質をもっている．以下に空気の弾性的性質について考える．

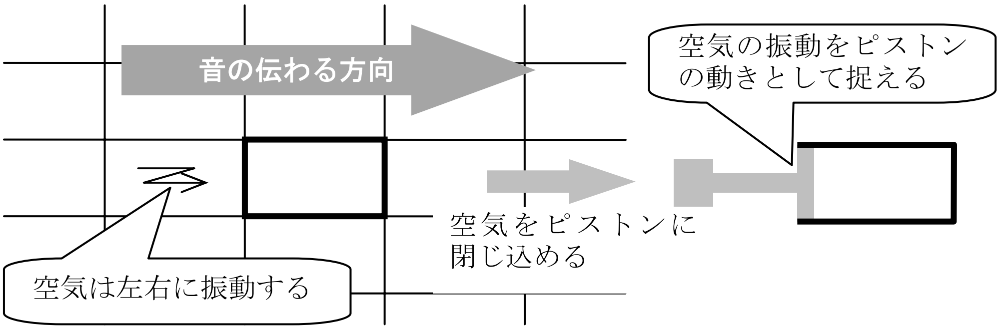


図 1.1 空気性質を考える方法

図1. 1に示すように, 空気を分割し, その１つをピストンの中に詰め込む. 次に図1. 2に示すように，詰め込んだ空気を，ピストンを押して圧縮するとする.

まず, 大気圧P_0の空気が入っている断面積Sのピストンを押し込んでΔd変位させる。その時に必要なピストンを押す力Fを求める（ここではΔxに比べΔdは微小とする).

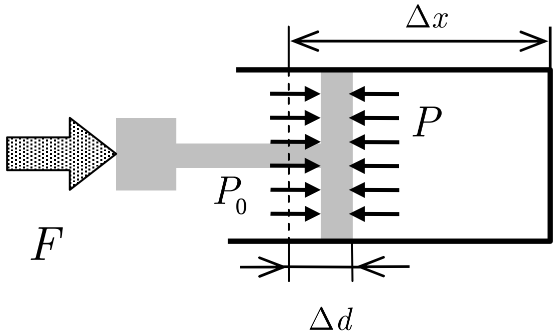


図 1.2　ピストンによる空気の圧縮

ピストンの変位によって, ピストンの中の空気の体積V_0はΔVだけ減少してVになり，圧力P_0はΔP増加してPとなる（ただし$\Delta V > 0$，$\Delta P > 0$とする）．すなわち，

$$V = V_0 - \Delta V \tag{1.1}$$

$$P = P_0 + \Delta P \tag{1.2}$$

と表すことができる.

ピストンの中の空気は熱の出入りのない断熱変化であったとすると，

$$PV^{\gamma} = 一定 \tag{1.3}$$

（ただし，γは比熱比で$\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$，$C_V$は空気の定積比熱，$C_P$は空気の定圧比熱である）

という関係がある（熱力学の断熱変化を勉強する必要がある).

ピストンを押す前後で(1.3)式が成り立つので,

$$P_0 V_0{}^{\gamma} = PV^{\gamma} \tag{1.4}$$

の関係が得られる.

ピストンの寸法より，

$$V_0 = S\Delta x \tag{1.5}$$

$$V = S\left(\Delta x - \Delta d\right) \tag{1.6}$$

である.

(1.4)式に(1.2)式，(1.5)式，(1.6)式を代入すると，

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} = \left(P_0 + \Delta P\right)\left\{S\left(\Delta x - \Delta d\right)\right\}^{\gamma}$$

が得られ，これを以下のように変形する.

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} = \left(P_0 + \Delta P\right)\left\{S\Delta x\left(1 - \frac{\Delta d}{\Delta x}\right)\right\}^{\gamma}$$

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} = \left(P_0 + \Delta P\right)\left(S\Delta x\right)^{\gamma}\left\{\left(1 - \frac{\Delta d}{\Delta x}\right)\right\}^{\gamma} \tag{1.7}$$

$\dfrac{\Delta d}{\Delta x}$は微小なので，$h$が微小なときの1次近似式$\left(1+h\right)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha h$を用いると(1.7)式は，

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} \fallingdotseq \left(P_0+\Delta P\right)\left(S\Delta x\right)^{\gamma}\left(1-\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}\right)$$

となる．

さらに，両辺を$\left(S\Delta x\right)^{\gamma}$で割ると，

$$P_0 \fallingdotseq \left(P_0+\Delta P\right)\left(1-\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}\right)$$

となり，さらに式を展開して整理していくと，

$$P_0 \fallingdotseq P_0+\Delta P-P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}-\Delta P\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}$$

$$\Delta P-P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}-\gamma\Delta P\frac{\Delta d}{\Delta x} \fallingdotseq 0 \tag{1.8}$$

となる．

$\Delta\xi$が微小なのでΔPも微小である．よって，$\gamma\Delta P\dfrac{\Delta d}{\Delta x}$は2次の微小量となり他の項と比較すると無視することができるぐらい微小になる．よって，(1.8)式は，

$$\Delta P-P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x} \fallingdotseq 0$$

$$\Delta P \fallingdotseq \frac{P_0\gamma}{\Delta x\ell}\Delta d \tag{1.9}$$

となる．今後, (1.9)式の≒は＝とみなせるとして，

$$\Delta P=P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x} \tag{1.11}$$

を用いることにする．

ピストンの柄の部分の力の釣り合いを考えると，

$$P_0S+F=PS \tag{1.10}$$

の関係式が得られる．

(1.11)式に(1.2)式を代入すると，

$$P_0S+F=\left(P_0+\Delta P\right)S$$

$$P_0S+F=P_0S+\Delta PS$$

$$\Delta PS-F=0$$

$$\Delta P=\frac{F}{S} \tag{1.12}$$

となる．(1.12)式を(1.10)式に代入すると，

$$\frac{F}{S}=P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}$$

$$F=\frac{P_0S\gamma}{\Delta x}\Delta d \tag{1.13}$$

が得られる．

この(1.13)式より，ピストンの変位量Δdはピストンを押す力Fに比例している．すなわち，ピストンの中にある空気はバネと同じような弾性的性質を示す．

2. 音速を表す式の導出

次に，断面積Sのチューブの中を伝わる音について考えていくことにする．

音は，チューブの中の空気が移動して伝わるのではなく，空気がチューブの長さ方向に振動し，この振動が近傍の空気をドミノ倒しのように次々と振動させることにより伝わる．よって，チューブの中の空気を，図 2.1 のように細かく分割して長さΔxの微小体積要素（図 1.2 のピストン内部の空気）が連結したものと考え，空気の振動をピストンの変位と置き換えて，音の伝達を考えることにする．

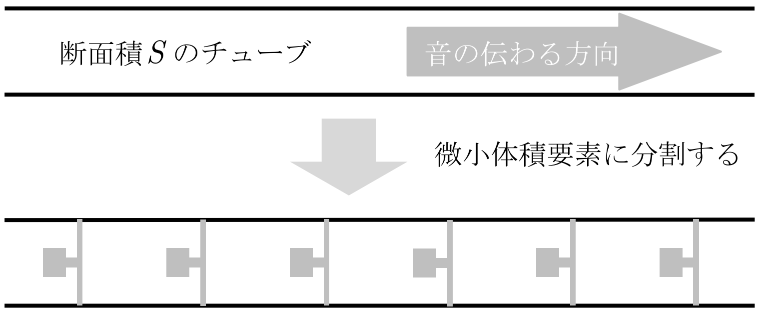


図 2.1　音速を求めるためのモデル

まず，チューブの中の空気に音が伝わり始めた状況，すなわち，ある部分の空気が振動（変位）し始めた状況を図 2.2 のモデルを用いて説明する．

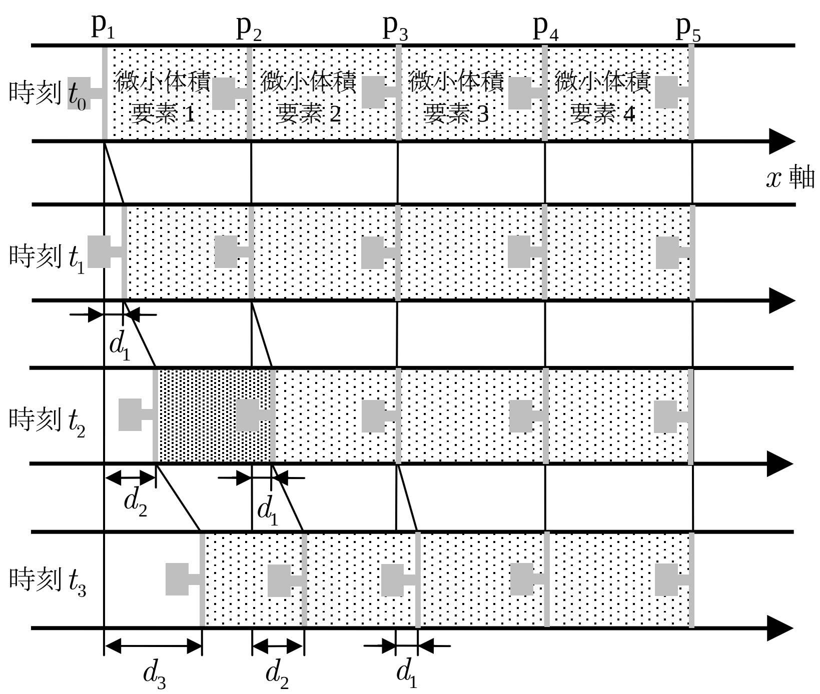


図 2.2　空気の振動（変位）が伝わる説明図

音の伝わる方向をx軸の正方向とする．音が伝わる前の各微小体積要素のx軸方向の長さをΔxとし，微小体積要素の境界には仮想のピストンが存在すると考える．さらに, ピストンは時間間隔Δtで以下のように変化するとする．音がチューブの左から伝わってきて時刻t_0で音が微小体積要素 1 の左端のピストンp_1に到達しピストンの変位が始まり，Δtの間にd_1だけピストンp_1が変位する．また, 波は時間Δtの間にΔx進むとする．ピストンp_1の変位が，t_0で 0，t_1でd_1，t_2でd_2，t_3でd_3と変化すると, 微小体積要素 2 の左端のピストンp_2の変位はt_0，t_1で 0，t_2でd_1，t_3でd_2に変化し，微小体積要素 3 の左端のピストンp_3の変位はt_0，t_1，t_2で 0，t_3でd_1に変化する．このようにそれぞれのピストン（微小体積要素の境界）が変位することにより，すなわち，空気が局部的に圧縮，膨張することにより, 空気の振動である音は伝わっていく.

音が伝わる様子を図 2.3 に示す．x_1，x_2，$\cdots$，x_5は，仮想ピストンp_1，p_2，$\cdots$，p_5の音が伝わる前のx軸上の位置のことである．ピストンp_1（微小体積要素 1 の左端）の変位の時間的変化（振動）がx軸方向に伝わっていく様子がよくわかる.

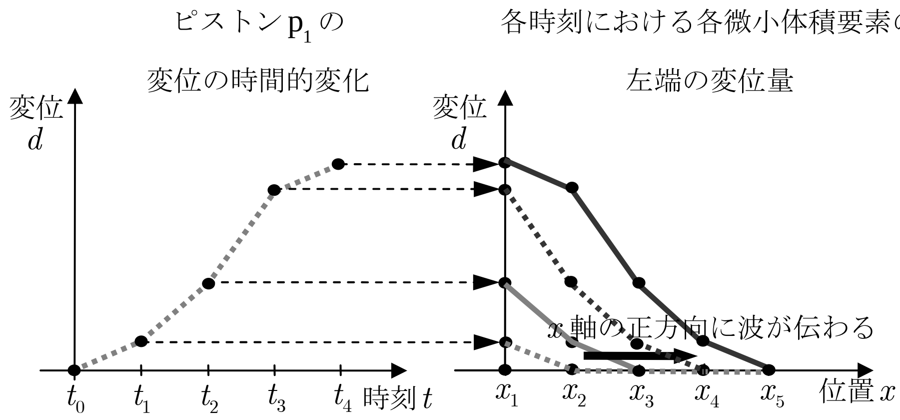
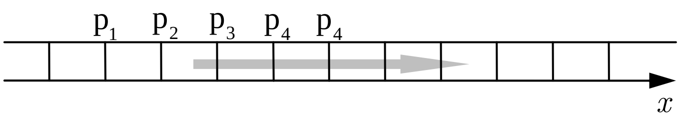


図 2.3　音が伝わる様子

図 2.3　の 2 つのグラフを 1 つにまとめて平面的に表現したものが，図 2.4 である．縦の並びが変位の時間的変化，横の並びが変位のx軸方向の変化を示す.



	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
t_0	d_0								
t_1	d_1	d_0							
t_2	d_2	d_1	d_0						
t_3	d_3	d_2	d_1	d_0					
t_4	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0				
t_5	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0			
t_6	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0		
t_7	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0	
t_8	d_8	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
t_9	d_9	d_8	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1

図 2.4　音が伝わる様子

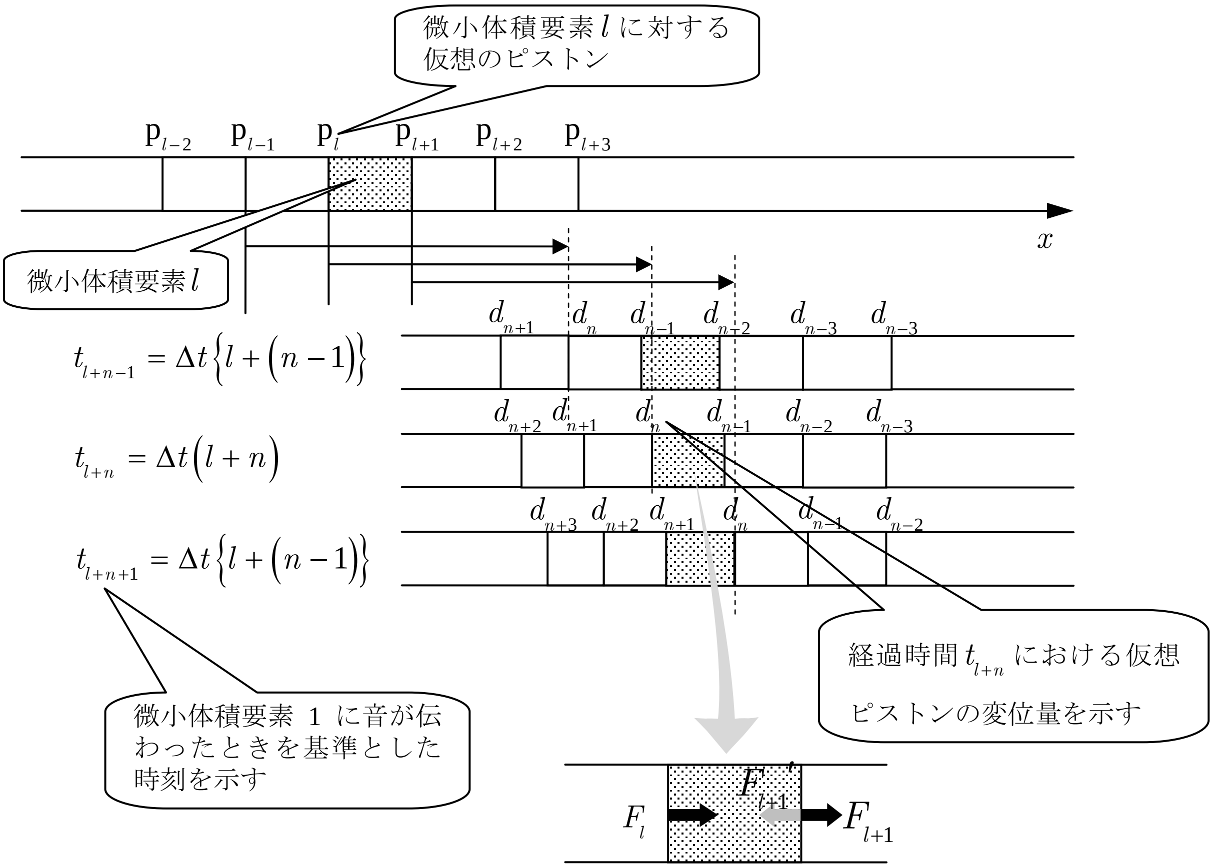


図 2.5　音速を求めるモデル

音の伝わる速さを，図 2.5 を用いて導くことにする．

微小体積要素 l の運動方程式は，

$$ma = F \tag{2.1}$$

（ただし，m は微小体積要素の質量，a は微小体積要素 l の x 軸方向へ移動する加速度，F は微小体積要素 l に働く外力である．）

である．

ρ を空気の密度，S をチューブの断面積とすると，m は，

$$m = \rho S \Delta x \tag{2.2}$$

と表される．

Δt が極微小な値であると Δx も極微小な値となり，微小体積要素の重心の速度は微小体積要素の右端の速度と同じであるとみなせる．

時刻 t_{l+n-1} から t_{l+n} の間の微小体積要素 l の平均の速度 v_{l+n-1} は，

$$v_{l+n-1} = \frac{d_{n-1} - d_{n-2}}{\Delta t} \tag{2.3}$$

となる．Δt が極微小な値であるので，Δt の値は t_{l+n-1} に比べると無視でき，速度 v_{l+n-1} は時刻 t_{l+n-1} の速度とみなすことができる．

同様にして t_{l+n} の間の微小体積要素 l の平均の速度 v_{l+n} は

$$v_{l+n} = \frac{d_n - d_{n-1}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

となる．

時刻t_{l+n-1}から時刻t_{l+n}の間の微小体積要素lの平均の加速度a_{l+n}は，

$$a_{l+n} = \frac{v_{l+n} - v_{l+n-1}}{\Delta t} \tag{2.5}$$

である．　Δtを極微小な値として考えると，速度のときと同様に加速度a_{l+n}は時刻t_{l+n}における加速度であるとみなせる（加速度a_{l+n}は時刻t_{l+n-1}における加速度とみなすこともできる）．よって，(2.3)式，(2.4)式を(2.5)式に代入すると，

$$a_{l+n} = \frac{v_{l+n} - v_{l+n-1}}{\Delta t} = \frac{\dfrac{d_n - d_{n-1}}{\Delta t} - \dfrac{d_{n-1} - d_{n-2}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}}{\left(\Delta t\right)^2} \tag{2.6}$$

となる．

運動方程式(2.1)式のFは微小体積要素lに働く外力の和であるので，この場合，

$$F = F_l + F_{l+1}{}' \tag{2.7}$$

（ただし，F_lは微小体積要素lの左端界面に働く外力，$F_{l+1}{}'$は微小体積要素lの右端界面に働く外力で，微小体積要素$l+1$の左端界面に働く外力F_{l+1}と作用，反作用の関係にある.）

となる．微小体積要素lの長さΔxの外力による変化Δd_lはd_nとd_{n-1}差となるので(1.13)式より，

$$F_l = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\Delta d_n = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - d_{n-1}\right) \tag{2.8}$$

となる．同様に考えて，

$$F_{l+1} = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\Delta d_{l+1} = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_{n-1} - d_{n-2}\right) \tag{2.9}$$

となる．$F_{l+1}{}'$はF_{l+1}の反作用なので符号が変わり，

$$F_{l+1}{}' = -\frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\Delta d_{l+1} = -\frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_{n-1} - d_{n-2}\right) \tag{2.10}$$

となる．よって，外力の総和Fは(2.7)式に(2.8)式，(2.10)式を代入することにより，

$$F = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - d_{n-1}\right) - \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_{n-1} - d_{n-2}\right) = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}\right) \tag{2.11}$$

となる．

(2.2)式，(2.6)式，(2.11)式を(2.1)式に代入すると（(2.6)式のa_{l+n}を(2.1)式aに代入している），

$$\rho S\Delta x \frac{d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}}{\left(\Delta t\right)^2} = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}\right) \tag{2.12}$$

となる．この(2.12)式を変形すると，

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}=\frac{P_0\gamma}{\rho}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\sqrt{\frac{P_0\gamma}{\rho}} \tag{2.13}$$

となる.

波は時間Δtの間にΔx進むので$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$は音の伝わる速さ$v$になる.

微小体積要素の気体の状態方程式$P_0V=nRT$より

$$P_0=\frac{nRT}{V} \tag{2.14}$$

（ただし，Rは気体定数，Tは絶対温度，nはモル数である.）

となる.

(2.14)式を(2.13)式に代入すると，

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\sqrt{\frac{\frac{nRT}{V}\gamma}{\rho}}=\sqrt{\frac{RT\gamma}{\frac{V\rho}{n}}} \tag{2.15}$$

となる．$\dfrac{V\rho}{n}$は1モル当たりの空気の質量になり，これをMとおくと(2.15)式は,

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\sqrt{\frac{RT\gamma}{M}} \tag{2.16}$$

となり音速を求める式が導かれた.

絶対温度Tと摂氏温度tの関係$T=273+t$を(2.16)式に代入し式を変形すると,

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{RT\gamma}{M}} \\ &= \sqrt{\frac{R\gamma}{M}(273+t)} \\ &= \sqrt{\frac{273R\gamma}{M}}\sqrt{1+\frac{t}{273}} \end{aligned}$$

hが微小なときの1次近似式$(1+h)^{\alpha}\fallingdotseq 1+\alpha h$の関係を用いると

$$\fallingdotseq\sqrt{\frac{273R\gamma}{M}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{273}\right) \tag{2.17}$$

ここで，Rは気体定数で8.31J･mol^{-1}･K^{-1}，Mは空気1モルの質量で2.89×10^{-2}kg･mol^{-1}，γは空気の定圧比熱と定積比熱の比で約1.4である．これらの値を(2.17)式に代入すると,

$$v\fallingdotseq 331.5+0.6t \tag{2.18}$$

となる．この式より0℃で，音速vの値は約331.5 m/sとなる．この値は，音速の実測値とよく一致している.

3. おわりに

以上説明してきたように，物理量の極微小な変化（Δt，Δx など），すなわち極限の考え方を利用して音速を表す式　$331.5+0.6t$　m/s（(2.18)式）を導いた．この考え方は微分の重要な考え方である．したがって，説明した内容の理解を深めるためにも微分の基礎をよく学んでほしい．また, 音速を表す $v \fallingdotseq 331.5+0.6t$ のような単純を理論的に求める際, 気体の状態方程式, 気体の断熱変化, 運動方程式などいくつかの物理的な基礎知識が基になっていることを知ってほしい. みなさんが物理を学ぶ際には多くの公式が出てくるが，今後その背後にある基礎知識を探求することを期待する.

参考文献

[1]　寺沢　徳雄，振動と波動，岩波書店，1984 年.

[2]　小橋　豊，音と音波，裳華房，1971 年.